



**T.C.
MİLLÎ SAVUNMA ÜNİVERSİTESİ
HEZÂRFEN HAVACILIK VE UZAY TEKNOLOJİLERİ ENSTİTÜSÜ
UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI
UYDU TEKNOLOJİLERİ PROGRAMI**

**Alçak İrtifa Yörünge Uydusu için Genişletilmiş Kalman
Uygulaması**

İleri Aviyonik Sistemler Dersi

**Mert SEVER
1191101**

Öğretim Üyesi: Prof. Dr. Cengiz HACIZADE

**İstanbul
HAZİRAN 2020**

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ	2
2. KALMAN FİLTRESİ	3
2. PROBLEM TANIMLAMASI	4
3. KALMAN FİLTRESİNİN UYGULANMASI.....	5
4. SONUÇLAR.....	9
5. KAYNAKÇA	13
6. EK	13

ŞEKİLLER TABLOSU

Şekil 1:Kalman Filtresi Diagramı ^[2]	3
Şekil 2: Konum ölçme hata grafiği	9
Şekil 3: Hız ölçme hata grafiği	9
Şekil 4:Kalman filtresi konum hata grafiği	10
Şekil 5:Kalman filtresi hız hata grafiği	10
Şekil 6: Normalize inovasyon grafiği	11
Şekil 7:Kestirim hatasının korelasyon matrisi diagonal elemanları grafiği	11
Şekil 8:Konum durum vektörleri	12
Şekil 9:Hız durum vektörleri	12

1.GİRİŞ

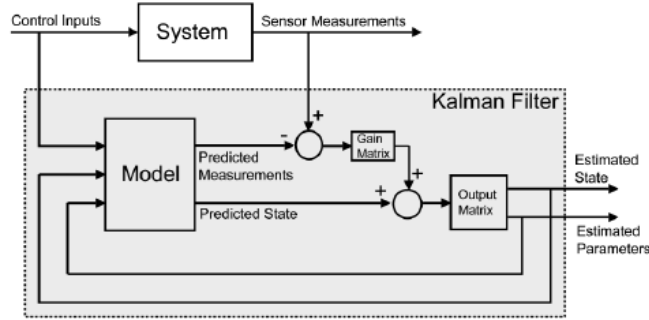
Uzay görevlerinin yüksek maliyetli ve hassas görevler olması nedeni ile hesaplamalardaki hassasiyet önem arz etmektedir. İlk insanlı Ay görevi ile bu hassas hesaplamaların oluşturulması için ilk kez Kalman filtresinden yararlanılmıştır. Bu çalışmada, alçak irtifa yörüngesinde (LEO) bulunan bir uydu için yörünge modeli oluşturulmuştur. Bu model doğrultusunda uydunun kartezyen durum vektörleri Kepler yörünge modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bu elde edilen kartezyen durum vektörlerine ölçme hatası eklenerek model gerçekçi kılınmıştır.

Projenin amacı oluşturulan bu hatalı modeli Kalman filtresi uygulaması ile teoriye, yani Kepler yörünge modeli ile oluşturulan kartezyen durum vektörlerine yakınsamaktır. Oluşturulan mimari ile uydunun elde ettiği hatalı ölçme durum vektörleri filtre yardımı ile teoriye yakınsayacak ve hata azalacaktır. Bu da problemin hem gerçekçi hem de teoriye yakın bir hale gelmesini sağlayacaktır.

2. KALMAN FİLTRESİ

Kalman Filtresi, durum uzayı modeli ile gösterilen bir dinamik sistemde, modelin önceki bilgileriyle birlikte giriş ve çıkış bilgilerinden sistemin durumlarını tahmin edilebilen filtredir. Macar asıllı Amerikan matematiksel sistem teoristi Rudolf Kalman tarafından bulunmuştur.

1960'lardan sonra araç navigasyonu başta olmak üzere (havacılık uygulamaları tipik olmasına rağmen, başka uygulama alanlarında da) kullanılan Kalman Filtresi, sistemin durumu hakkında optimize edilmiş bir tahmin sağlayan bir algoritmadır. Algoritma, gürültülü bir gözlem veri akışı (tipik olarak, sensör ölçümleri) üzerinde gerçek-zamanlı, özyinelemeli çalışarak hatayı en aza indirecek şekilde filtreleme yapar ve sistemin fiziksel karakteristiklerinin modellenmesi ile üretilen gelecek durumun matematiksel tahminine göre optimize eder. ^[1]



Şekil 1: Kalman Filtresi Diagramı^[2]

Kalman Filtreleri havacılıkta aşağıdaki amaçlarla kullanılmaktadır:

- Ölçüm hatalarının küçültülmesi ve ölçülen parametrenin daha doğru değerinin bulunması (Filtrasyon Problemi)
- Durum vektörünün ölçülmeyen koordinatlarının kestirimi (estimate) (kestirim problemi – estimation problem)
- Cismin matematiksel modelinin bilinmeyen parametrelerinin kestirimi (Identification – Tanılama)
- Çeşitli bilgi kaynaklarının tümleştirilmesi (sensor fusion) veya (Integrated Navigation) da denir.
- Uçakta meydana gelen bozulmaların tespiti (Fault detection)

Lineer dinamik sistemi ele alındığında sistemin durum denklemi sistemin dinamiğini, gözlem denklemi ise ölçümün oluşma mekanizmasını belirler.

2. PROBLEM TANIMLAMASI

Uyduların dünya etrafındaki izledikleri yol yörünge olarak adlandırılır.

Uyduların yörüngeleri Kepler denklemleri ile belirlenir. Uydunun başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir;

Kartezyen – (ECI kordinat düzlemi)	Alçak İrtifa Uydusu Başlangıç Değerleri
$x :$	6.866408048299360e+06 m
$y :$	-0.045946952529641e+06 m
$z :$	0.021836860674639e+06 m
$\vec{r} :$	6.866596497296249e+06 m
$\dot{x} :$	0.004670323776707e+03 m/s
$\dot{y} :$	-1.059401675085081e+03 m/s
$\dot{z} :$	-7.537605438813253e+03 m/s
$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	7.611691630138756e+03 m/s

Kepler Denklemleri:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x_1 = x_0 + dt * Vx_0$$

$$y_1 = y_0 + dt * Vy_0$$

$$z_1 = z_0 + dt * Vz_0$$

$$Vx_1 = Vx_0 + dt * \frac{-G * M_{Earth} * x_0}{r^3}$$

$$Vy_1 = Vy_0 + dt * \frac{-G * M_{Earth} * y_0}{r^3}$$

$$Vz_1 = Vz_0 + dt * \frac{-G * M_{Earth} * z_0}{r^3}$$

Yukarıdaki Kepler denklemleri ile elde edilen değerler, uyduların teorik olarak davranışını belirler.

Ölçme Denklemleri:

$$x_{ölçüm} = x_{teori} + (\sigma_x * random)$$

$$y_{ölçüm} = y_{teori} + (\sigma_y * random)$$

$$z_{ölçüm} = z_{teori} + (\sigma_z * random)$$

$$Vx_{ölçüm} = Vx_{teori} + (\sigma_{Vx} * random)$$

$$Vy_{ölçüm} = Vy_{teori} + (\sigma_{Vy} * random)$$

$$Vz_{ölçüm} = Vz_{teori} + (\sigma_{Vz} * random)$$

Yukarıdaki denklemdeki teori değerleri Kepler denklemlerinden elde edilmiştir. Ölçüm değerlerinin elde edilmesi için aşağıdaki değerler kullanılmıştır.

$$\sigma_x = 10m \quad \sigma_y = 10m \quad \sigma_z = 15m \quad \sigma_{Vx} = 0.02 \frac{m}{s} \quad \sigma_{Vy} = 0.02 \frac{m}{s} \quad \sigma_{Vz} = 0.02 \frac{m}{s}$$

Ölçümden elde edilen konum ve hızlar gerçek bir modelde uydunun davranışının simülasyonu olarak düşünülebilir. Oluşturulan bu simülasyon modeline Kalman filtresi uygulanacaktır. Filtrenin amacı, ölçümden kaynaklanan hatayı küçülterek, modelin teoriye yaklaşmasını sağlamaktır.

3. KALMAN FİLTRESİNİN UYGULANMASI

Filtrenin uygulanabilmesi için ilk önce başlangıç değerleri oluşturulmalıdır. Modelde kullanılan Genişletilmiş Kalman Filtresinin (EKF) yakınsaması için başlangıç değerleri önemlidir. Yanlış değer seçimi filtrenin uzaksamasına sebep olacaktır. Modelde başlangıç konum ve hız parametreleri ilk hız ve konum ölçüm değerleri olarak seçilmiştir.

$$\begin{aligned} x_{EKF}(1) &= x_{ölçüm}(1), & y_{EKF}(1) &= y_{ölçüm}(1), & z_{EKF}(1) &= z_{ölçüm}(1) \\ Vx_{EKF}(1) &= Vx_{ölçüm}(1), & Vy_{EKF}(1) &= Vy_{ölçüm}(1), & Vz_{EKF}(1) &= Vz_{ölçüm}(1) \end{aligned}$$

Kestirim hatasının korelasyon matrisi için başlangıç durumu (P_0):

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Sistem bozuntusunun geçiş matrisi (G):

$$G = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistem bozuntu matrisi (Q):

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Ölçüm birim matrisi (H):

$$H = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ölçme hatasının kovaryans matrisi (R):

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{Vx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{Vy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{Vz}^2 \end{bmatrix}$$

Yukarıda tanımlanan matrisler arasında G,R,Q,H matrisleri filtre uygulanması esnasında değışmeyecek, sabit kalacaktır. Ancak A ve P matrisi filtrenin her adımında kendisini güncelleyecektir. Yukarıda tanımlanan P_0 matrisi ilk durum için oluşturulmuştur.

Jacobian matrisi (A):

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 x_1 &= x0 + dt * Vx \\
 y_1 &= y0 + dt * Vy \\
 z_1 &= z0 + dt * Vz \\
 Vz_1 &= Vx0 + dt * \left(\frac{-mu * x}{r^3} \right) \\
 Vz_1 &= Vy0 + dt * \left(\frac{-mu * y}{r^3} \right) \\
 Vz_1 &= Vz0 + dt * \left(\frac{-mu * z}{r^3} \right)
 \end{aligned}$$

Yukardaki denklemlerin x,y,z,Vx,Vy,Vz ye göre kısmi türevleri alındığında aşağıdaki Jacobian matrisi oluşacaktır.

1	0	0	dt	0	0
0	1	0	0	dt	0
0	0	1	0	0	dt
$\frac{-(dt * mu * (-2 * x^2 + y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	$\frac{(3 * dt * mu * x * y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	$\frac{(3 * dt * mu * x * z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	1	0	0
$\frac{(3 * dt * mu * x * y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	$\frac{-(dt * mu * (x^2 - 2 * y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	$\frac{(3 * dt * mu * y * z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	0	1	0
$\frac{(3 * dt * mu * x * z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	$\frac{(3 * dt * mu * x * y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	$\frac{-(dt * mu * (x^2 + y^2 - 2 * z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(5/2)}}$	0	0	1

Jacobian matrisinin içerisindeki x,y,z değerleri filtrenin oluşturduğu bir adım önceki değerler olacaktır.

Öngörülen kestirim hatasının korelasyon matrisi P_{tahmin} veya $P_{\frac{k}{k-1}}$:

$$P_{\frac{k}{k-1}} = A_{\frac{k}{k-1}} * P_{\frac{k-1}{k-1}} * A_{\frac{k}{k-1}}^T + G * Q * G^T$$

Bu gösterime göre Payda şuna kadar yapılmış olan ölçüm sayısını, pay ise şunki adım sayısını ifade etmektedir.

Optimal Filtrenin kazan katsayısı matrisi (K):

$$K_k = P_{\frac{k}{k-1}} * H^T * (H * P_{\frac{k}{k-1}} * H^T + R)^{-1}$$

İnovasyon süreç matrisi ($\tilde{z}$):

$$\tilde{z}_{\frac{k}{k-1}} = \text{Ölçüm} - \text{Kalman kestirimi}$$

Düzeltilmiş durum matrisi ($\tilde{X}$):

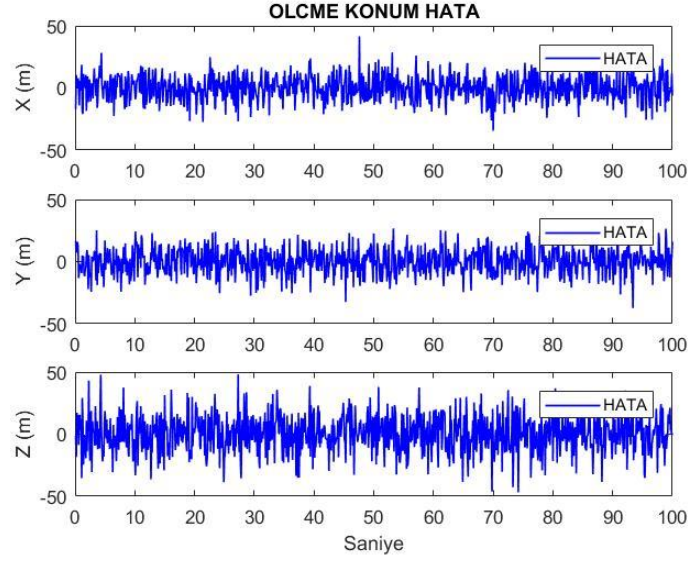
$$\tilde{X} = \text{Kalman kestirimi} + (K_k * \tilde{z}_{\frac{k}{k-1}})$$

Kestirim hatasının korelasyon matrisi ($P_{\frac{k}{k}}$):

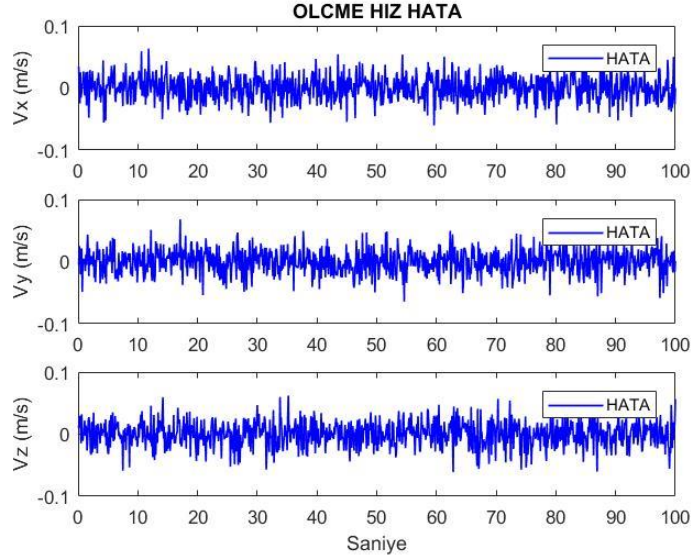
$$P_{\frac{k}{k}} = I_{6 \times 6} - K_k * H * P_{\frac{k}{k-1}}$$

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada alçak irtifa uydusu için kalman filtresi ile yörünge kestirimi uygulanmıştır. Kepler denklemlerine göre elde edilen yörünge değerlerine ölçme hatası eklenmiştir. Oluşturulan ölçme değerleri ile teori değerlerinin farkı alınarak aşağıdaki şekil 2 ve şekil 3 deki ölçme hatası grafikleri elde edilmiştir.

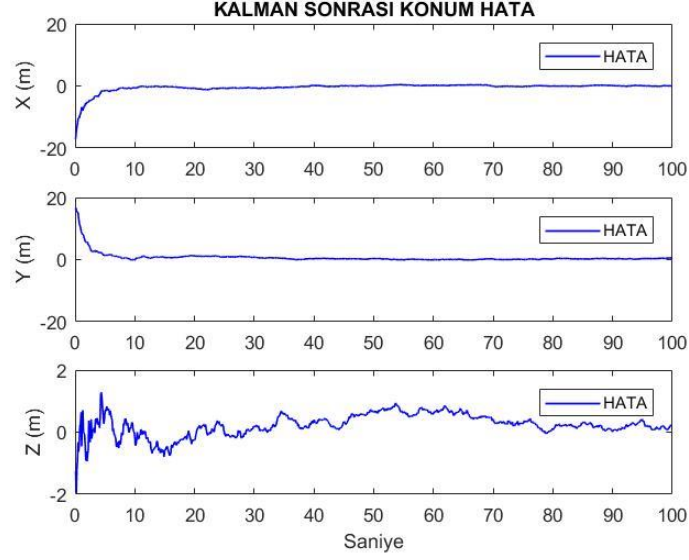


Şekil 2: Konum ölçme hata grafiği

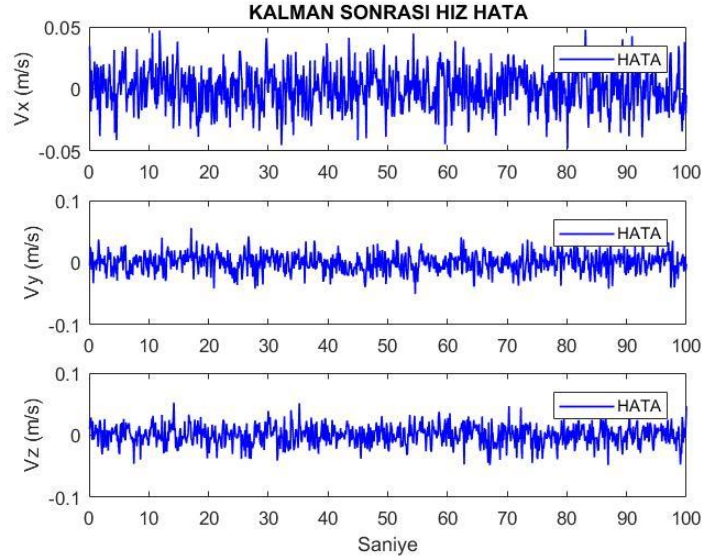


Şekil 3: Hız ölçme hata grafiği

Elde edilen hatalı konum ve hız vektörleri Genişletilmiş Kalman Filtresi (EKF) uygulanarak teoriye yakınlaştırılmıştır ve hata değerlerinde azalma amaçlanmıştır. Bu doğrultuda Kalman filtresinin kestirim değerleri ile teori değerlerinin farkı alınarak yeni hata grafikleri, şekil 4 ve şekil 5 oluşturulmuştur. Bu grafiklerde beklenti filtrenin teoriye yaklaşması nedeni ile hatanın sıfır (0) a yakınsaması olacaktır.

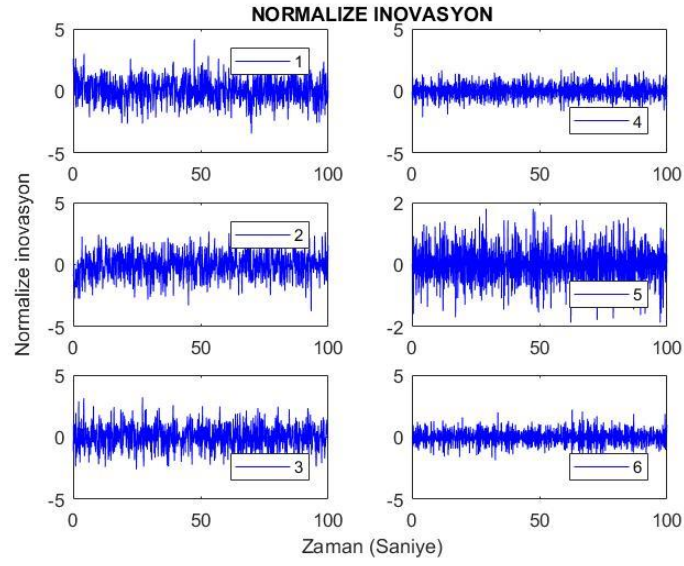


Şekil 4: Kalman filtresi konum hata grafiği

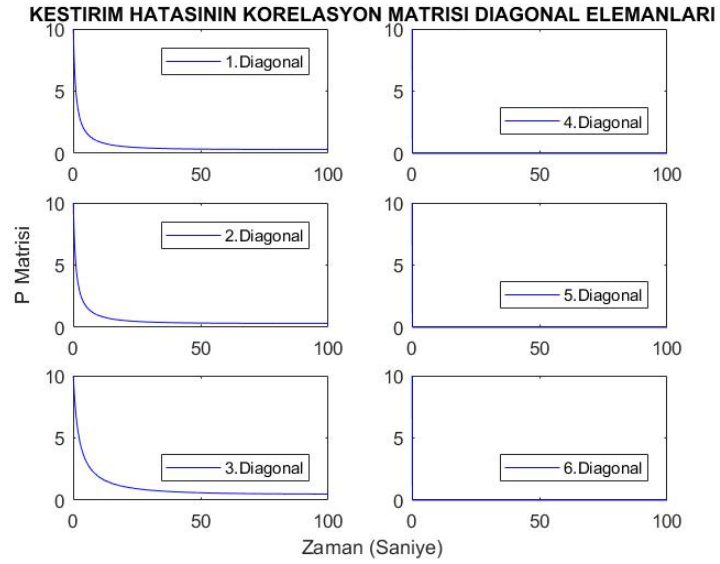


Şekil 5: Kalman filtresi hız hata grafiği

Filtrenin doğru çalıştığını kontrol etmek için normalize inovasyon değerleri incelenmelidir. Normalize inovasyon değerleri sıfır (0) civarında yoğunlaşmış olmalıdır.

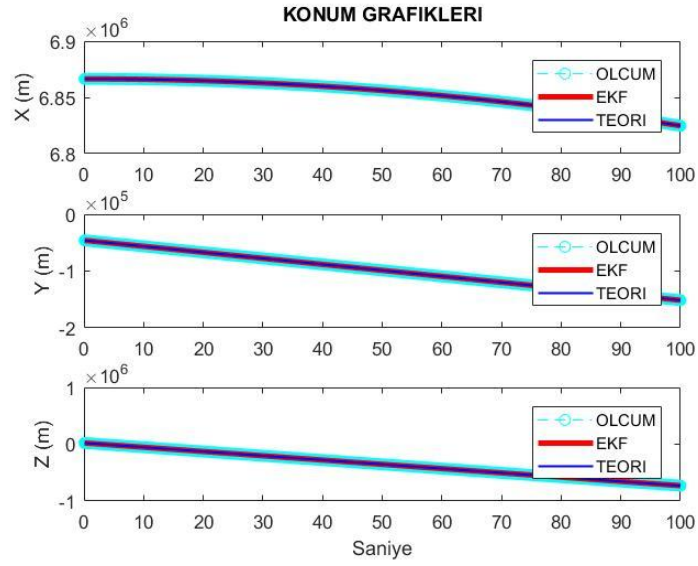


Şekil 6: Normalize inovasyon grafiği

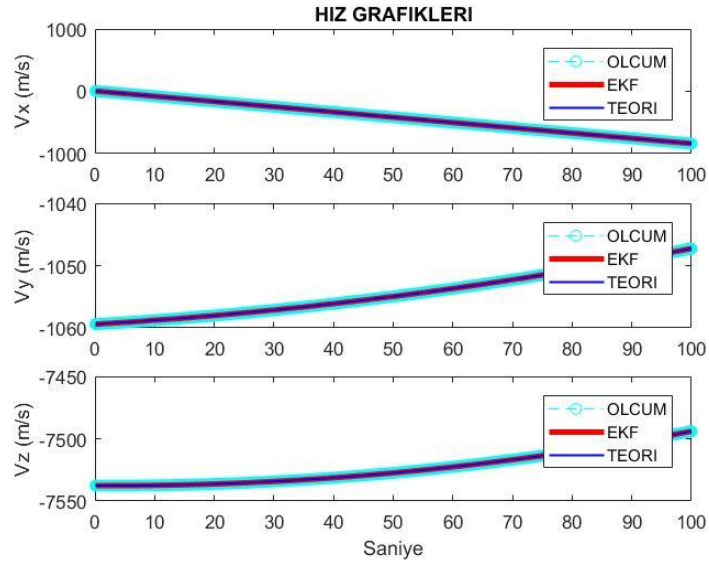


Şekil 7:Kestirim hatasının korelasyon matrisi diagonal elemanları grafiği

Tablo 1: Kalman Filtresi İyileştirmesi			
	Başlangıç Durumu	Son Durum	İyileştirme
σ_x	10 m	0.5634 m	≈ 17.7 kat
σ_y	10 m	0.5634 m	≈ 17.7 kat
σ_z	15 m	0.6983 m	≈ 21.4 kat
σ_{Vx}	$0.02 \frac{m}{s}$	$0.0175 \frac{m}{s}$	≈ 1.15 kat
σ_{Vy}	$0.02 \frac{m}{s}$	$0.0175 \frac{m}{s}$	≈ 1.15 kat
σ_{Vz}	$0.02 \frac{m}{s}$	$0.0175 \frac{m}{s}$	≈ 1.15 kat



Şekil 8:Konum durum vektörleri



Şekil 9:Hız durum vektörleri

Oluşturulan bu modele ve elde edilen sonuçlara göre Kalman filtresinin bozuntulu ölçüm değerlerini iyileştirdiği ve teoriye yakınsadığı belirlenmiştir. Genişletilmiş Kalman filtresi ile oluşturulan modelin daha hassas doğrulukta çalışacağı gösterilmiştir.

5. KAYNAKÇA

1. https://tr.wikipedia.org/wiki/Kalman_Filtresi
2. https://miro.medium.com/max/962/1*ewXZdyE5th2FyfneAsIASg.png
3. Deney Verilerinin İşlenme Yöntemleri ve Mühendislik Uygulamaları – Cengiz Hacızade